全品

教辅图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30+年创始人专注教育行业

全品学练考

AI智慧教辅

主编 肖德好

导学案

高中数学

必修第二册 SJ

本书为AI智慧教辅

“讲课智能体”支持学生聊着学，扫码后哪里不会选哪里；随时随地想聊就聊，想问就问。

天津出版传媒集团
天津人民出版社

CONTENTS 目录 导学案

13 第13章　立体几何初步
PART THIRTEEN

14 第14章　统计
PART FOURTEEN

15 第15章　概率
PART FIFTEEN

第9章　平面向量

9.1　向量概念

【学习目标】

1. 通过对力、速度、位移等的分析，了解平面向量的实际背景，理解平面向量、零向量、向量的模、单位向量、平行向量（共线向量）的意义和两个向量相等的含义.

2. 能够在熟悉的实际问题情境中，理解平面向量的几何表示和基本要素.

课前预习

知识导学　素养初识

◆ 知识点一　向量的概念

1. 既有________，又有________的量叫作向量.

2. 只有________，没有________的量称为数量.

◆ 知识点二　向量的表示法

向量的表示

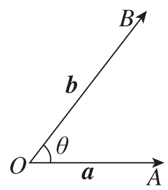
- 几何表示：用有向线段来表示，有向线段的长度表示向量的大小，箭头所指的方向表示向量的方向. 向量$\overrightarrow{AB}$的大小称为向量$\overrightarrow{AB}$的_____(或称为模)，记作_____
- 字母表示：印刷用黑体小写字母$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$表示，书写用$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$来表示

◆ 知识点三　向量的有关概念

相关概念	定义	注意
零向量	长度为0的向量称为零向量，记作$\mathbf{0}$	方向是任意的
单位向量	长度等于____________长度的向量	单位向量有无数个
平行向量（共线向量）	方向相同或相反的非零向量叫作平行向量. 向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行，记作____________. 任意一组____________都可以平移到同一条直线上，因此平行向量又称为________	零向量与任一向量平行
相等向量	长度________且________相同的向量叫作相等向量. 向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$相等，记作$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$	在平面内，相等的向量有无数多个
相反向量	与向量$\boldsymbol{a}$长度______，方向________的向量，叫作$\boldsymbol{a}$的相反向量，记作$-\boldsymbol{a}$	零向量的相反向量仍是零向量

◆ 知识点四　向量的夹角

1. 定义：对于两个________向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$（如图所示），在平面内任取一点O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则$\angle AOB=\theta(0^\circ\leqslant\theta\leqslant180^\circ)$叫作向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的________.



2. 向量的夹角θ的取值范围是____________. 当$\theta=$________时，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同向；当$\theta=$________时，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$反向；当$\theta=$________时，则称向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$垂直，记作________.

【诊断分析】判断正误.（正确的打"√"，错误的打"×"）

(1)若向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线，向量$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$共线，则向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{c}$共线.（　）

(2)若向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不共线，向量$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$不共线，则向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{c}$不共线.（　）

(3)若向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$是共线向量，则A,B,C,D四点一定共线.（　）

(4)若向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不共线，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$都是非零向量.（　）

(5)在同一平面内，把所有长度为1的向量的起点固定在同一点，则这些向量的终点形成的轨迹是半径为1的圆.（　）

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　向量的基本概念

例1 (1)给出下列物理量：①质量；②速度；③力；④加速度；⑤位移；⑥密度；⑦功. 其中是向量的有（　）

A. 4个　　B. 3个

C. 2个　　D. 1个

(2)某船从 A 点出发向正西方向航行了 150 km 到达 B 点，然后改变方向向北偏西 30°方向航行了 200 km 到达 C 点，最后又改变方向向正东方向航行了 150 km 到达 D 点.

①作出向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$；

②求 $|\overrightarrow{AD}|$.

变式 下列说法中错误的是 ( )

A. 向量的模是一个非负实数

B. 任何一个非零向量都可以平行移动

C. 两个有共同起点且共线的向量终点也必相同

D. 零向量的模为 0，方向任意

[素养小结]

解决与向量概念有关问题的关键是突出向量的核心——方向和长度. 如，单位向量的核心是方向没有限制，但长度都是一个单位长度；零向量的核心是方向没有限制，长度是 0；规定零向量与任意向量共线. 只有紧紧抓住概念的核心才能顺利解决与向量概念有关的问题.

◆ 探究点二 相等向量与共线向量

例 2 下列说法中，正确的是 ( )

A. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为非零向量，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是共线向量，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 是平行向量，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 是方向相同的向量

B. 任意两个相等的非零向量的起点与终点总是一个平行四边形的四个顶点

C. 相等的非零向量必是共线向量

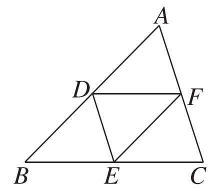
D. 有相同起点的两个非零向量一定不是平行向量

例 3 如图，D，E，F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB，BC，CA 的中点，在以 A，B，C，D，E，F 为起点和终点的向量中：

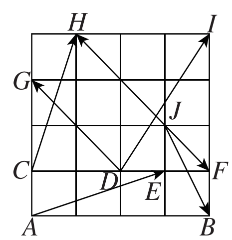
(1)找出与向量 $\overrightarrow{EF}$ 相等的向量；

(2)找出与向量 $\overrightarrow{DF}$ 共线的向量；

(3)找出与向量 $\overrightarrow{DE}$ 相反的向量.



变式 (多选题)如图所示，每个小正方形的边长都是 1，在其中标出了 7 个向量，则在这 7 个向量中 ( )



A. 向量 $\overrightarrow{CH}$，$\overrightarrow{DG}$ 的模相等

B. 图中所示的向量中没有与 $\overrightarrow{AE}$ 共线的向量

C. 向量 $\overrightarrow{DG}$，$\overrightarrow{HF}$ 共线

D. $\overrightarrow{JH}$ 与 $\overrightarrow{JF}$ 互为相反向量

[素养小结]

判断一组向量是否相等，关键是看这组向量是否方向相同，长度相等，与起点和终点的位置无关. 判断一组向量是否共线，只需判断它们是否同向或反向.

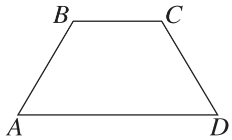
◆ 探究点三　向量的夹角

例 4　在平行四边形 $ABCD$ 中，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$，且向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 的夹角为 $60°$.

(1) $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角为多少？

(2) $\overrightarrow{DB}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角为多少？

变式　如图，已知在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$\angle A=60°$，则下列说法正确的是　　(　　)



A. $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 的夹角为 $0°$

B. $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DA}$ 的夹角为 $60°$

C. $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 的夹角为 $120°$

D. $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 的夹角为 $60°$

[素养小结]

寻找两个向量的夹角时，必须把两个向量的起点平移到同一个点. 如在 $\triangle ABC$ 中，A,B,C 分别是三角形的内角，则向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 A，向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角为 $\pi-B$.

9.2　向量运算

9.2.1　向量的加减法

第 1 课时　向量的加法运算

【学习目标】

1. 借助实例和平面向量的几何表示，掌握平面向量加法运算及运算规则，并理解其几何意义，会用向量加法的三角形法则和平行四边形法则作出两个向量的和.

2. 能够在数学问题情境中，掌握向量加法的交换律与结合律，并会用它们进行向量运算.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ 知识点一　向量加法的定义及运算法则

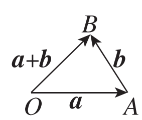
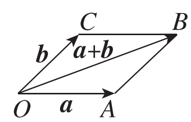
1. 向量加法的定义

求__________的运算叫作向量的加法.

2. 向量加法的运算法则

	三角形法则	平行四边形法则
前提	已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$	已知两个不共线的非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$
作法	在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=$______	作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}$，以 OA，OC 为邻边作 $\square OABC$，连接 OB，则 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$
结论	向量 $\overrightarrow{OB}$ 叫作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$	向量 $\overrightarrow{OB}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和

(续表)

	三角形法则	平行四边形法则
图形		
特例	任一向量与其相反向量的和是零向量，即 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 对于零向量和任一向量 $\boldsymbol{a}$，我们规定__________	
三角不等式	$\vert\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\vert\leqslant\vert\boldsymbol{a}\vert+\vert\boldsymbol{b}\vert$，当且仅当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 方向相同时等号成立	

◆ 知识点二　向量加法的运算律

1. 运算律

运算律	交换律	$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$______
	结合律	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=$______

2. 向量加法不等式：$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

【诊断分析】判断正误.(正确的打“√”,错误的打“×”)

(1)两个向量相加的结果可能是一个数量. ( )

(2)两个向量相加实际上就是两个向量的模相加. ( )

(3)任意两个向量的和向量不可能与这两个向量共线. ( )

(4)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\mathbf{0}$. ( )

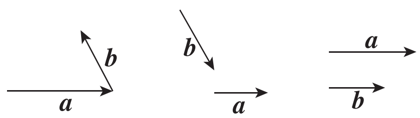
(5)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. ( )

课中探究

考点探究 素养小结

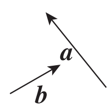
◆ 探究点一 向量加法的三角形法则与平行四边形法则

例 1 (1)已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,用向量加法的三角形法则作出图①②③中的向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.(不写作法,画出图形即可)



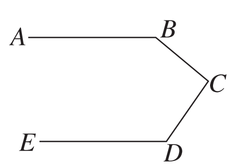
① ② ③

(2)已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$(如图),请用向量加法的平行四边形法则作出向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.(不写作法,画出图形即可)



变式 如图,请在图中直接标出:

(1)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$;(2)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$.



[素养小结]

(1)在使用向量加法的三角形法则时,要注意“首尾相接”,即若第一个向量的终点与第二个向量的起点重合,则以第一个向量的起点为起点,并以第二个向量的终点为终点的向量为两向量的和.

(2)应用向量加法的平行四边形法则的前提是“共起点”,即两个向量是从同一点出发的不共线向量.

拓展 当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 处于什么位置时,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

◆ 探究点二 向量的加法运算及运算律

例 2 化简:(1)$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$;

(2)$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}$;

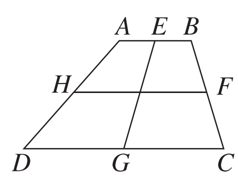
(3)$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BN})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})$;

(4)$\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{DC}$.

变式 如图,E,F,G,H 分别是梯形 $ABCD$ 的边 AB,BC,CD,DA 的中点,化简下列各式:

(1)$\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{CB}$;

(2)$\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EB}$.



[素养小结]

解决向量的加法运算问题时应注意以下几点：

(1)可以利用向量的几何表示，画出图形进行化简或计算.

(2)要灵活应用向量加法的运算律.

(3)注意各向量的起点、终点及向量起点、终点字母的排列顺序，特别注意勿将 $\mathbf{0}$ 写成 0.

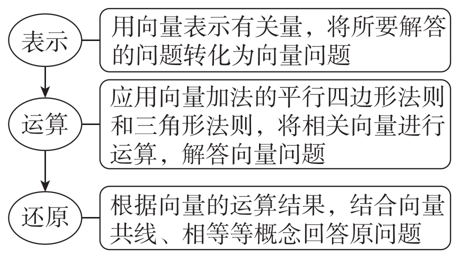
◆ 探究点三　向量加法的实际应用

例 3　一条河的宽为 800 m，一艘船从 A 处出发垂直到达河正对岸的 B 处，船在静水中速度的大小为 20 km/h，水流速度的大小为 12 km/h，求船到达 B 处所需时间.

变式　飞机从 A 地按北偏西 15° 的方向飞行 1400 km 到达 B 地，再从 B 地按南偏东 75° 的方向飞行 1400 km 到达 C 地，求该飞机飞行的路程和位移.

[素养小结]

应用向量解决实际问题的基本步骤



第 2 课时　向量的减法运算

【学习目标】

1. 借助实例和平面向量的几何表示，掌握平面向量减法运算及运算规则，并理解其几何意义.
2. 会作出两个向量的差.

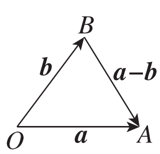
课前预习　知识导学　素养初识

◆ 知识点一　向量减法的概念

若 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$，则向量 $\boldsymbol{x}$ 叫作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的________，记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 求两个向量差的运算，叫作向量的减法.

◆ 知识点二　向量减法的几何意义

当向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 起点相同时，从 $\boldsymbol{b}$ 的________指向 $\boldsymbol{a}$ 的________的向量就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.



如图，以 O 为起点，作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

◆ 知识点三　$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 与 $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$ 之间的关系

(1)对于任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，都有________ $\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant$________；

(2)当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线，且同向时，有 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$________或________；

(3)当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线，且反向时，有 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$________.

【诊断分析】判断正误.(正确的打“√”，错误的打“×”)

(1)两个向量的差仍是一个向量.　(　　)

(2)向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 的差与向量 $\boldsymbol{b}$ 和向量 $\boldsymbol{a}$ 的差互为相反向量.　(　　)

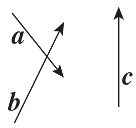
(3)化简 $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{CB}$ 的结果为 $\overrightarrow{AC}$.　(　　)

(4)已知非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 必与 $\boldsymbol{a}$ 同向.　(　　)

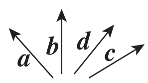
(5)若 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等.　(　　)

◆ 探究点一　向量的减法及其几何意义

例1 如图，已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共线，求作向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.



变式 如图所示，已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$，求作向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}$.



[素养小结]

求作两个向量的差向量的两种思路

(1)可以转化为向量的加法来进行，如 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，可以先作 $\boldsymbol{a}$，$-\boldsymbol{b}$，然后作 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 即可.

(2)也可以直接用向量减法的几何意义，使两向量的起点重合，则差向量为连接两个向量的终点，指向被减向量的终点的向量.

◆ 探究点二　向量加减法的基本运算

例2 化简：(1)$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AD}$；

(2)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}$.

变式 化简：(1)$\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NQ}-\overrightarrow{PQ}=$________；

(2)$\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=$________；

(3)$\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}=$________.

[素养小结]

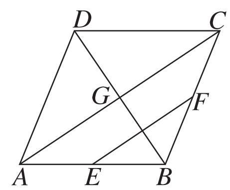
向量加法与减法的混合运算要注意交换律与结合律灵活运用.

◆ 探究点三　向量加法与减法的综合应用

例3 如图所示，在平行四边形 $ABCD$ 中，E,F 分别为边 AB 和 BC 的中点，G 为 AC 与 BD 的交点.

(1)若 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}|$，则四边形 $ABCD$ 是什么特殊的平行四边形？说明理由.

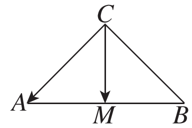
(2)化简 $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{EB}$，并在图中作出表示该化简结果的向量.



变式 如图所示，已知 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$\angle ACB=90°$，M 是斜边 AB 的中点，$\overrightarrow{CM}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$.

求证：(1)$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|$；

(2)$|\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=|\boldsymbol{b}|$.



[素养小结]

向量加法与减法的三角形法则将向量加法与减法的几何意义得以体现，要明确和向量与差向量的起点与方向.

拓展 若 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$（$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 均为非零向量）.

①当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足什么条件时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 垂直？

②当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足什么条件时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$？

③当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足什么条件时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 平分 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角？

④$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 可能是相等向量吗？

9.2.2 向量的数乘

【学习目标】

1. 通过实例分析，掌握平面向量数乘运算及运算规则，理解其几何意义.
2. 理解两个平面向量共线的含义.
3. 了解平面向量的线性运算性质及其几何意义.

课前预习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 向量的数乘

1. 定义：实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 相乘的运算，叫作向量的数乘.

2. 表示及规定：实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积是一个________，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的长度和方向规定如下：

(1)$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

(2)若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向________；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向________.

3. 向量数乘 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的几何意义

当 $\lambda>0$ 时，把向量 $\boldsymbol{a}$ 沿着 $\boldsymbol{a}$ 的相同方向________；当 $\lambda<0$ 时，把向量 $\boldsymbol{a}$ 沿着 $\boldsymbol{a}$ 的__________方向__________.

◆ 知识点二 平面向量数乘的运算

1. 运算律：设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为向量，λ，μ 为实数，则有：

①$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

②$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

③$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

特别地，有$(-\lambda)\boldsymbol{a}=\lambda(-\boldsymbol{a})=-(\lambda\boldsymbol{a})$，$\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$.

2. 向量的线性运算：向量的加法、减法和数乘统称为向量的线性运算. 向量线性运算的结果仍是向量. 对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，以及任意实数 λ，μ_1，μ_2，恒有 $\lambda(\mu_1\boldsymbol{a}\pm\mu_2\boldsymbol{b})=\lambda\mu_1\boldsymbol{a}\pm\lambda\mu_2\boldsymbol{b}$.

◆ 知识点三 向量共线定理

向量共线定理：设 $\boldsymbol{a}$ 为________向量，如果有一个实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，那么 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 是共线向量；反之，如果 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$（$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$）是共线向量，那么__________实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

规定：如果向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线且向量 $\boldsymbol{b}$ 的长度是向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度的 λ 倍，即 $|\boldsymbol{b}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$，那么当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时，$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$；当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时，$\boldsymbol{b}=-\lambda\boldsymbol{a}$.

【诊断分析】 判断正误.（正确的打“√”，错误的打“×”）

(1)若向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，则存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.（　）

(2)$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向一致.（　）

(3)若 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.（　）

(4)对于任意实数 m 和向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，若 $m\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.（　）

(5)化简：$\frac{1}{12}[2(2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b})-4(4\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})]=2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.（　）

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 向量数乘的概念

例 1 (1)给出下列说法：

①对于实数 m 和向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，恒有 $m(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}-m\boldsymbol{b}$；

②对于实数 m，n 和向量 $\boldsymbol{a}$，恒有 $(m-n)\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}-n\boldsymbol{a}$；

③若 $m\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}(m\in\mathbf{R})$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；

④若 $m\boldsymbol{a}=n\boldsymbol{a}(m,n\in\mathbf{R},\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$，则 $m=n$.

其中，正确说法的个数是（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

(2)设 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量,λ 是非零实数,则下列结论正确的是 ( )

A. $\boldsymbol{a}$ 与 $-\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向相反

B. $|-\lambda\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{a}|$

C. $\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda^2\boldsymbol{a}$ 的方向相同

D. $|-\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\boldsymbol{a}$

◆ 探究点二 向量线性运算

例 2 化简:(1)$6(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})+9(-2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$;

(2)$\frac{1}{2}\left[(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right]-\frac{7}{6}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{3}{7}\left(\boldsymbol{b}+\frac{7}{6}\boldsymbol{a}\right)\right]$;

(3)$6(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-4(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-2(-2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$.

变式 (1)化简:$(5\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-2(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=$________.

(2)已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 满足关系式 $3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}$, $-4\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$,试用向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$.

[素养小结]

(1)向量的数乘运算类似于代数多项式的运算,实数运算中的去括号、移项、合并同类项、提取公因式等变形方法在数与向量的乘积中同样适用,但是在这里的“同类项”“公因式”指向量,实数应看作是向量的系数.

(2)向量也可以通过列方程(或方程组)求解,同时在运算过程中应注意观察,恰当的运用运算律,简化运算过程.

◆ 探究点三 向量共线定理及其应用

例 3 (1)[2025·江苏宿迁中学高一质检]已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BC}=-3\boldsymbol{a}+7\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CD}=4\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$,则下列结论中正确的是 ( )

A. A,B,C 三点共线　　B. A,B,D 三点共线

C. A,C,D 三点共线　　D. B,C,D 三点共线

(2)已知 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是平面上两个不共线的向量,且 $\overrightarrow{AB}=k\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2$,$\overrightarrow{CD}=-\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$,$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$.

①若 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$ 方向相反,求 k 的值;

②若 A,C,D 三点共线,求 k 的值.

变式 (1)已知 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是平面上两个不共线的向量,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$,$\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2$,$\overrightarrow{CD}=3(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)$,则以下三点中共线的是 ( )

A. A,B,D　　B. A,B,C

C. B,C,D　　D. A,C,D

(2)设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个不共线的向量,若向量 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $4\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 的方向相反,则实数 $k=$________.

[素养小结]

1. 判断向量共线或三点共线的方法

(1)判断、证明向量共线问题的思路是根据向量共线定理寻求唯一的实数 λ,使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$.

(2)一般来说,要判断 A,B,C 三点是否共线,只需看是否存在实数 λ,使得 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$(或 $\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ 等)即可.

2. 利用向量共线定理求参数的基本步骤

(1)根据向量共线的充要条件建立共线向量之间的等量关系,从而求得参数.

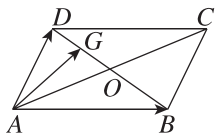
(2)依据下述结论列方程(组)求参数.

结论:如果 $\lambda\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线,则实数 λ 和 μ 都是 0.

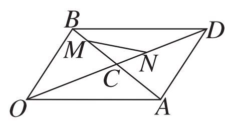
理由:假设 λ,μ 是两个不同时为 0 的实数,不妨设 $\lambda\neq0$,则 $\boldsymbol{b}=\frac{\mu}{\lambda}\boldsymbol{a}$.由两个向量共线的充要条件知,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,与已知矛盾,所以假设不成立,实数 λ 和 μ 都是 0.

◆ 探究点四　用已知的向量表示未知的向量

例 4　如图,在▱$ABCD$ 中,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,点 O 是 AC 与 BD 的交点,点 G 是 DO 的中点,试用 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AG}$.



变式　如图所示,已知四边形 $OADB$ 是平行四边形,$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{e}_1$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{e}_2$,$C$ 是对角线 OD 与 AB 的交点,$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$,试用 $\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$ 表示向量 $\overrightarrow{MN}$.



[素养小结]

用已知向量表示其他向量的两种方法

1. 直接法

画图 — 结合图形的特征,把待求向量放在三角形或平行四边形中

↓

表示 — 结合向量的三角形法则或平行四边形法则及向量共线定理用已知向量表示未知向量

2. 方程法

当直接表示比较困难时,可以首先利用三角形法则或平行四边形法则建立关于所求向量和已知向量的等量关系,然后解关于所求向量的方程.

拓展　点 E,F 分别为四边形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 的中点,设 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{b}$,试用 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{EF}$.

9.2.3　向量的数量积

第 1 课时　向量数量积的定义、投影向量

【学习目标】

1. 通过物理中“功”等实例,理解平面向量数量积的概念及其物理意义,会计算平面向量的数量积.
2. 通过几何直观,了解平面向量投影的概念以及投影向量的意义,体会平面向量数量积与投影向量的关系.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ 知识点一　向量的数量积

1. 定义:已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,它们的夹角是 θ($\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的夹角记作$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$),我们把数量________叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积,记作________,即________. 我们规定:零向量与任一向量的数量积为________.

2. 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角公式:两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ,可以由 $\cos\theta=$________求得. 特别注意向量夹角的取值范围是________.

◆ 知识点二　数量积的性质

设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 是非零向量,它们的夹角是 θ,则

(1)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$________.

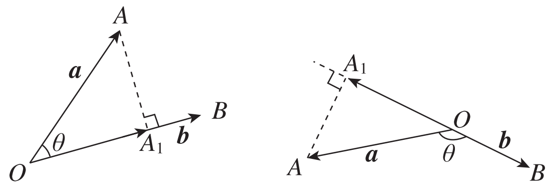
(2)当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________;当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________.

特别地,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=$________或$|\boldsymbol{a}|=$________,此性质可用来求向量的模,这两个等式实现了实数运算与向量运算的相互转化.

(3)对任意两个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$,当且仅当________时等号成立.

◆ 知识点三　投影向量

投影向量：如图所示，设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，$\overrightarrow{OA}$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}$ 表示向量 $\boldsymbol{b}$，过点 A 作 $\overrightarrow{OB}$ 所在直线的垂线，垂足为点 A_1. 我们将上述由向量 $\boldsymbol{a}$ 得到向量 $\overrightarrow{OA_1}$ 的变换称为向量 $\boldsymbol{a}$ 向向量 $\boldsymbol{b}$________，向量 $\overrightarrow{OA_1}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的____________.



对于向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为____________.

向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积就是向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的________与向量 $\boldsymbol{b}$ 的________，即__________.

【诊断分析】 判断正误.（正确的打“√”，错误的打“×”）

(1)向量数量积的运算结果可能是向量.　(　　)

(2)向量数量积的运算结果可能是负数，也可能是零.　(　　)

(3)已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=4$，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=8$.　(　　)

(4)设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$ 的充要条件是 $\cos\theta>0$.　(　　)

(5)若 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{e}|=1$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的夹角为 $30°$，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{e}$ 上的投影向量为 $2\sqrt{3}\boldsymbol{e}$.　(　　)

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　向量数量积的运算

例 1　已知 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=5$.

(1)若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的值；

(2)若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的值；

(3)若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $30°$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的值.

变式　在等腰直角三角形 ABC 中，$AB=BC=4$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$________，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}=$________，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=$________.

[素养小结]

求平面向量数量积的一般步骤：(1)求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ，$\theta\in[0,\pi]$；(2)分别求 $|\boldsymbol{a}|$ 和 $|\boldsymbol{b}|$；(3)代入公式 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，求数量积要特别注意书写时 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间用实心圆点“·”连接，而不能用“×”连接，也不能省去.

◆ 探究点二　平面向量数量积的基本性质

例 2　给出以下结论：①$\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}=0$；②若非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$；③$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$；④已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是三个非零向量，若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|$；⑤$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；⑥若非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角. 其中正确结论的个数为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

变式　已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是三个非零向量，则下列说法中正确的个数为　(　　)

①若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\pm|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；

②若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 反向共线，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$；

③若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

④若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

[素养小结]

当非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$，且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角；当非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角.

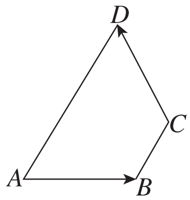
◆ 探究点三　投影向量

例 3　已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=1$，向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$，求：

(1)向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量；

(2)向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量.

例 4 [2025·湖南长沙一中高一质检] 如图,在平面四边形 $ABCD$ 中,$\angle ABC=\angle BCD=120^{\circ}$,$AB=CD$,则向量 $\overrightarrow{CD}$ 在向量 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量为 ( )



A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AB}$　　B. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AB}$

变式 (1)已知等边三角形 ABC 的边长为 2,则向量 $\overrightarrow{AB}$ 在向量 $\overrightarrow{CA}$ 上的投影向量为 ( )

A. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$　B. $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$　C. $2\overrightarrow{AC}$　D. $2\overrightarrow{CA}$

(2)已知 $|\boldsymbol{b}|=3$,若 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ ( )

A. 3　　B. $\frac{9}{2}$

C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

(3)[2025·江苏海门中学高一质检] 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=5$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-5$,$|\boldsymbol{b}|=1$,则向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量的模为________.

[素养小结]

对于非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,其夹角为 θ,则向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta\ \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

第 2 课时　向量数量积的运算律

【学习目标】

理解平面向量数量积的运算律,会用数量积判定两个平面向量的垂直关系.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ 知识点一　向量数量积的运算律

向量数量积满足的运算律

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2)$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$($\lambda$ 为实数);

(3)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

◆ 知识点二　平面向量数量积运算的常用公式

多项式乘法	向量数量积
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=$________
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=$________
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$________
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=$________ ________

【诊断分析】 判断正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是任意的非零向量,且它们相互不共线,则 $2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$. ( )

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2$ ( )

(3)$\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. ( )

(4)已知 $|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=2$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$,则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$. ( )

(5)若非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$,则 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=1$. ( )

课中探究　考点探究　素养小结

◆ 探究点一　向量数量积的运算律

例 1 (多选题)设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是不共线的非零向量,则下列结论正确的是 ( )

A. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$

B. $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$ 不与 $\boldsymbol{c}$ 垂直

C. $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$

D. $(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=9|\boldsymbol{a}|^2-4|\boldsymbol{b}|^2$

变式 (多选题)将平面向量的数量积运算与实数的乘法运算相类比,得到下列结论,其中正确的是 ( )

A. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

B. $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$

C. $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$

D. 由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$,可得 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$

◆ 探究点二　数量积运算律的应用

例 2 (1)[2025·山东济宁一中高一月考] 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,$|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=3$,$|\boldsymbol{c}|=5$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________.

(2)[2025·江苏宿迁中学高一质检] 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD=2AB=2$, 且 $\angle ABC=\frac{\pi}{3}$, E 为 BC 的中点, F 为 CD 的中点, 则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=$________.

变式 (1)已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=2$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=$ ( )

A. $\frac{17}{2}$　　B. $\frac{15}{2}$

C. $-\frac{17}{2}$　　D. $-\frac{15}{2}$

(2)[2025·江苏南京一中高一月考] 已知等边三角形 ABC 的边长为 2, 若 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$, 则 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AE}$ 等于 ( )

A. $\frac{10}{3}$　　B. $-\frac{10}{3}$

C. 2　　D. -2

[素养小结]

(1)根据数量积的运算律可知, 向量的加、减法与数量积的混合运算类似于多项式的乘法运算.

(2)对于以图形为背景的向量数量积的题目, 解题时要充分利用图形的特征及其含有的特殊向量求解, 这里的特殊向量主要指具有特殊夹角或已知长度的向量.

◆ 探究点三　向量模、夹角的计算问题

例 3 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=1$, 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$.

(1)求 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;

(2)求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角.

变式 (1)[2025·福建泉州一中高一月考] 不共线的三个平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 两两的夹角都相等, 且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$, $|\boldsymbol{c}|=3$, 则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=$________.

(2)[2025·湖北黄冈中学高一质检] 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=1$, $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值为________.

[素养小结]

求平面向量的模和夹角时要注意数量积运算律的正确运用, 在解决与图形有关的模与夹角问题时要注意选择合适的向量表示及公式的正确计算.

◆ 探究点四　两个非零向量的垂直问题

例 4 (1)已知非零向量 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 满足 $4|\boldsymbol{m}|=3|\boldsymbol{n}|$, $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$, 若 $\boldsymbol{n}\perp(t\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})$, 则实数 t 的值为 ( )

A. 4　　B. -4

C. $\frac{9}{4}$　　D. $-\frac{9}{4}$

(2)[2025·江苏南京一中月考] 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是单位向量, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$, 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$, 则 $|\boldsymbol{c}|=$ ( )

A. 3　　B. $\sqrt{7}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

变式 [2025·山东泰安一中高一质检] 已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=1$, $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 且 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}(\lambda\in\mathbf{R})$ 垂直, 则 $\lambda=$________.

[素养小结]

解决与两个非零向量的垂直有关的问题时要利用 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 列方程求解.

拓展 已知 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是平面内的两个单位向量, 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 若向量 $\boldsymbol{c}$ 满足 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$, 则 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值是________.

9.3 向量基本定理及坐标表示

9.3.1 平面向量基本定理

【学习目标】

了解平面向量基本定理及其意义，会用平面向量基本定理解决简单数学问题.

课前预习

知识导学　素养初识

◆ 知识点一　平面向量基本定理

1. 平面向量基本定理：如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内两个__________的向量，那么对于这一平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$，有且只有一对实数 λ_1,λ_2，使 $\boldsymbol{a}=$__________.

2. 基底：我们把两个__________的向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 叫作这个平面的一组基底.

3. 正交分解：平面内任一向量 $\boldsymbol{a}$ 可以用一组基底 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 表示成 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 的形式，我们称__________为向量 $\boldsymbol{a}$ 的分解，当 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 所在直线互相垂直时，这种分解也称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的__________.

◆ 知识点二　平面向量基本定理的应用

1. 平面向量基本定理唯一性的应用：

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是同一平面内的两个不共线向量，若 $x_1\boldsymbol{a}+y_1\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{a}+y_2\boldsymbol{b}$，则 $\begin{cases}x_1=x_2,\\ y_1=y_2.\end{cases}$

2. 重要结论：设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是平面的一组基底，且 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$.

①当 $\lambda_2=0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 共线；

②当 $\lambda_1=0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 共线；

③当 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 时，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

【诊断分析】 判断正误.（正确的打"√"，错误的打"×"）

(1)任何一个平面向量 $\boldsymbol{a}$ 都可以表示成 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$（$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 为平面内的一组确定的基底）的形式，这种表示形式是唯一的.（　　）

(2)在平面中，互相垂直的两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 能作为平面的一组基底.（　　）

(3)一个平面只有一组基底.（　　）

(4)只有不共线的两个向量才可以作为一组基底.（　　）

(5)平面的基底一旦确定，该平面内的向量关于基底的分解也是唯一确定的.（　　）

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　对基底概念的理解

例 1 (1)设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是平面的一组基底，则下列四组向量中不能作为一组基底的是（　　）

A. $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$

B. $3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2,4\boldsymbol{e}_2-6\boldsymbol{e}_1$

C. $\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_1$

D. $\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_1$

(2)设 O 是平行四边形 $ABCD$ 两条对角线的交点，给出下列四组向量：

①$\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}$；②$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{BC}$；③$\overrightarrow{CA},\overrightarrow{DC}$；④$\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}$.

其中能作为平行四边形所在平面的一组基底的是（　　）

A. ①②　　B. ①③

C. ①④　　D. ③④

变式 (1)(多选题)[2025·华中师大附中高一月考]如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是同一个平面内两个不共线的向量，那么下列说法中正确的是（　　）

A. $\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2$（$\lambda,\mu\in\mathbf{R}$）可以表示该平面内的所有向量

B. 对于该平面内任意一个向量 $\boldsymbol{a}$，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2$ 成立的实数对 (λ,μ) 有无穷多对

C. 两向量 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\mu_1\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{b}=\lambda_2\boldsymbol{e}_1+\mu_2\boldsymbol{e}_2$ 共线，则有且只有一个实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$

D. 若存在实数 λ,μ 使得 $\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}$，则 $\lambda=\mu=0$

(2)设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{d}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，试判断 $\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 能否作为一组基底.

[素养小结]

判断两个向量是否能作为一组基底,主要看两向量是否非零且不共线.此外,一个平面的基底一旦确定,那么该平面内任意一个向量都可以由这组基底唯一线性表示出来.

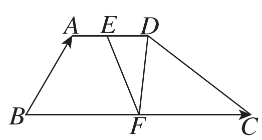
◆ 探究点二　用基底表示向量

例 2 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是不共线的向量,且 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$.

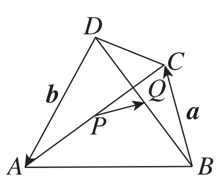
(1)证明:$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是一组基底;

(2)若 $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$,用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的线性组合表示 $\boldsymbol{c}$.

例 3 如图,已知在梯形 $ABCD$ 中,$AD/\!/BC$,E,F 分别是 AD,BC 的中点,且 $BC=3AD$,$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$.试用基底 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{EF},\overrightarrow{DF}$.



变式 如图,P,Q 分别是平面四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 的中点,设 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不是共线向量,则向量 $\overrightarrow{PQ}=$ ________(用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示).



[素养小结]

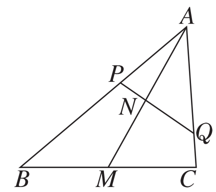
解决用已知向量表示其他向量的问题的关键是正确利用向量的加法、减法及数乘的几何意义.

(1)若题目中已给出了基底,求解此类问题时,常利用向量加法的三角形法则或平行四边形法则,结合数乘运算找到所求向量与基底的关系.

(2)若题目中没有给出基底,常结合已知条件先寻找一组从同一点出发的两个不共线向量作为基底,然后用上述方法求解.

◆ 探究点三　平面向量基本定理的应用

例 4 如图所示,在$\triangle ABC$ 中,P,Q 分别是边 AB,AC 上的点,中线 AM 与 PQ 交于点 N,若 $AB:AP=5:2$,$AC:AQ=4:3$,求 $AM:AN$.



变式 [2025·江苏东海高一期中] 在平行四边形 $ABCD$ 中,E,F 分别为 AB,BC 的中点,AF 与 DE 交于点 N,$\overrightarrow{AN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$,则 $x+y=$ (　　)

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

[素养小结]

利用平面向量的线性运算以及平面向量基本定理处理平面几何的有关问题时,要充分利用共线、垂直的充要条件.

9.3.2 向量坐标表示与运算

第 1 课时 向量的坐标表示与向量线性运算的坐标表示

【学习目标】

1. 借助平面直角坐标系，理解平面向量坐标的概念，掌握平面向量的正交分解及坐标表示.
2. 掌握平面向量的坐标运算，会用坐标表示平面向量的加、减运算.

课前预习 知识导学 素养初识

◆ 知识点一 向量的坐标

1. 平面向量的坐标表示

在平面直角坐标系中，分别取与 x 轴、y 轴正方向相同的两个单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ 作为基底，对于平面内的向量 $\boldsymbol{a}$，由平面向量基本定理可知，有且只有一对有序实数(x, y)，使得 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$. 我们把有序实数对________称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的(直角)坐标，记作________.

特殊向量的坐标：$\boldsymbol{i}=(1,0)$，$\boldsymbol{j}=(0,1)$，$\boldsymbol{0}=(0,0)$.

2. 点的坐标与向量坐标的区别和联系

区别	表示形式不同	向量 $\boldsymbol{a}=(x, y)$中间用等号连接，而点 $A(x, y)$中间没有等号
	意义不同	点 $A(x, y)$的坐标(x, y)表示 A 在平面直角坐标系中的位置，$\boldsymbol{a}=(x, y)$的坐标(x, y)既表示向量的大小，也表示向量的方向
联系	当平面向量的起点在原点时，平面向量的坐标与向量终点的坐标相同	

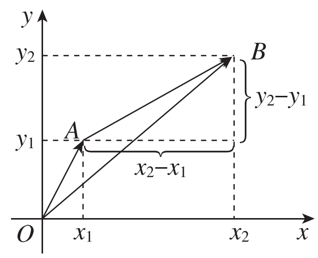
◆ 知识点二 向量线性运算的坐标表示

已知向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$和实数 λ，则有下表：

	符号表示	文字描述
加法	$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$________	两个向量和的坐标分别等于这两个向量相应坐标的________
减法	$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=$________	两个向量差的坐标分别等于这两个向量相应坐标的________
数乘	$\lambda\boldsymbol{a}=$________	实数与向量的积的坐标等于用这个实数乘原来向量的相应坐标

◆ 知识点三 平面向量的坐标表示

如图，若 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则 $\overrightarrow{AB}=$________. 这就是说，一个向量的坐标等于该向量________的坐标________的坐标.



【诊断分析】 判断正误.(正确的打"√"，错误的打"×")

(1)已知向量 $\boldsymbol{i}=(1,0)$，$\boldsymbol{j}=(0,1)$，$\boldsymbol{m}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$，则 $\boldsymbol{m}$ 的坐标是$(4,-1)$. ( )

(2)在平面直角坐标系中，任意向量 $\boldsymbol{m}$ 的坐标都是唯一的. ( )

(3)若两个向量的终点不同，则这两个向量的坐标一定不同. ( )

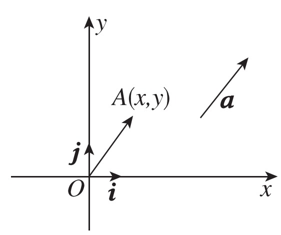
(4)已知平面向量 $\overrightarrow{AB}=(1,2)$，$\overrightarrow{AC}=(3,4)$，则向量 $\overrightarrow{CB}=(2,2)$. ( )

(5)已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,-3)$，$\boldsymbol{c}=(3,4)$，且 $\boldsymbol{c}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}$，则 λ_1, λ_2 的值分别为 1,2. ( )

课中探究 考点探究 素养小结

◆ 探究点一 平面向量的坐标表示

例 1 (1)如图所示，在平面直角坐标系中，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ 分别为与 x 轴、y 轴正方向相同的单位向量，$\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{a}$ 是平面内的向量，且点 A 的坐标为(x, y)，则下列说法正确的是________.(填序号)

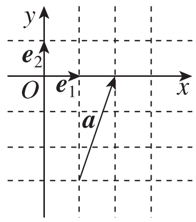


①向量 $\boldsymbol{a}$ 可以表示为 $\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{i}+n\boldsymbol{j}$ $(m\in\mathbf{R}, n\in\mathbf{R})$；

②只有当 $\boldsymbol{a}$ 的起点在原点时，$\boldsymbol{a}=(x, y)$；

③若 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，则终点 A 的坐标就是向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

(2)如图,以 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 为基底,且 $\boldsymbol{e}_1=(1,0),\boldsymbol{e}_2=(0,1)$,则向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 ( )



A. $(1,3)$　　B. $(3,1)$

C. $(-1,-3)$　　D. $(-3,-1)$

变式 已知 O 是坐标原点,点 A 在第一象限,直线 OA 与 x 轴的夹角为 $60°$,$|\overrightarrow{OA}|=4\sqrt{3}$.

(1)求向量 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标;

(2)若 $B(\sqrt{3},-1)$,求 $\overrightarrow{BA}$ 的坐标.

[素养小结]

求向量坐标的方法

(1)定义法:根据平面向量坐标的定义得 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=(x,y)$,其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 分别为与 x 轴、y 轴正方向同向的单位向量.

(2)平移法:把向量的起点移至坐标原点,则终点坐标即为向量的坐标.

(3)求差法:先求出这个向量的起点、终点坐标,再运用终点坐标减去起点坐标即得该向量的坐标.

◆ 探究点二　向量线性运算的坐标表示

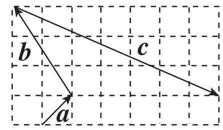
例 2 (1)[2025·江苏东台高一期中] 已知点 $A(-1,1),B(2,-1)$,若直线 AB 上的点 D 满足 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BD}$,则点 D 的坐标为 ( )

A. $(5,-2)$　　B. $(6,-2)$

C. $(4,-3)$　　D. $(5,-3)$

(2)已知 $\boldsymbol{a}=(-1,2),\boldsymbol{b}=(2,1)$,则 $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=$ ________,$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}=$ ________.

变式 (1)[2025·江苏徐州一中高一月考] 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 在正方形网格中的位置如图所示,用基底 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{c}$,则 ( )



A. $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$　　B. $\boldsymbol{c}=-3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$

C. $\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$　　D. $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$

(2)已知三点 $A(2,-1),B(3,4),C(-2,0)$,则 $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CA}=$ ________,$\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB}=$ ________.

[素养小结]

向量的坐标运算主要是利用加、减运算法则及数乘运算法则进行,解题时要注意方程思想的运用及正确使用运算法则.

拓展 已知 $O(0,0),A(1,2),B(3,3)$,且 $\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.试问:

(1)t 为何值时,点 P 在 x 轴上? y 轴上? 第一象限?

(2)四边形 $ABPO$ 能否为平行四边形? 若能,求出相应的 t 值;若不能,请说明理由.

◆ 探究点三　线段定比分点的坐标及应用

例 3 已知两点 $P_1(2,-1),P_2(-1,3)$,点 P 在直线 P_1P_2 上,且满足 $|\overrightarrow{P_1P}|=\frac{2}{3}|\overrightarrow{PP_2}|$,求点 P 的坐标.